3. Soit la fonction g(x)= sin(f(x))
g est dérivable sur IR comme étant composée de fonctions dérivables et g'(x)= f'(x).cos (f(x))

$$\lim_{x\to 2}\frac{\sin(f(x))}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{g(x)-g(2)}{x-2}\quad car\ g(2)=0$$
$$=g'(2)=f'(2).\cos(f(2))$$
$$=3.\cos(0)=3$$

4. Soit la fonction k(x)=f(x²+x+2)
k est dérivable sur IR comme étant composée de fonctions dérivables et
k'(x)=(2x+1).f'(x²+x+2)

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x^2+x+2)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{k(x)-k(0)}{x-0}\quad car\ k(0)=0$$
$$=k'(0)=f'(2)=3$$

EX 8 :

1. f(x)= $\sqrt{x+\sqrt{x}}$; $I=]0,+\infty[$
la fonction $x\mapsto x+\sqrt{x}$ est dérivable et strictement positive sur I d'où f est dérivable sur I

$$f'(x)=\frac{\left(x+\sqrt{x}\right)'}{2\sqrt{x+\sqrt{x}}}=\frac{1+\frac{1}{2\sqrt{x}}}{2\sqrt{x+\sqrt{x}}}$$
f'(x)=
$$=\frac{1+2\sqrt{x}}{4\sqrt{x}.\sqrt{x+\sqrt{x}}}$$

2. La fonction : $x\mapsto \sin x$ est dérivable et strictement positive sur $]0,\frac{\pi}{2}]$ d'où f est dérivable sur $]0,\frac{\pi}{2}]$ et f'(x)= $\frac{\cos x}{2\sqrt{\sin x}}$

3. La fonction : $x\mapsto\frac{\pi}{x}$ est dérivable sur [1,+∞[et comme la fonction sinus est dérivable sur IR Alors f est dérivable sur [1,+∞[
et f'(x)= $\frac{-\pi}{x^2}.\cos(\frac{\pi}{x})$

4. f(x)= tg(sin(x))
La fonction sinus est dérivable sur IR et $\forall x\in IR;\ \sin(x)\in[-1,1]$; comme la fonction tangente est dérivable sur [-1,1]
Alors f est dérivable sur IR et
f'(x)=cos(x).[1+tg²(sin(x))]

EX 9: f(x)=1+x+x²+x³+x⁴

1. f'(x)=1+2x+3x²+4x³

$$f'(x)=2+6x+12x^2\geq 0\ \forall x\in\left[0,\frac{1}{10}\right]$$

d'où f' est croissante sur $[0,\frac{1}{10}]$ Alors

$$0\leq x\leq\frac{1}{10}\Rightarrow f'(0)\leq f'(x)\leq f'(\frac{1}{10})$$
$$\Rightarrow 1\leq f'(x)\leq 1,234$$
$$\Rightarrow 0\leq f'(x)\leq 1,234$$

2. Soit $x\in[0,\frac{1}{10}]$, f est dérivable sur [0,x] et $0\leq f'(t)\leq 1,234\ \ \forall t\in[0,x]$
Alors d'après th.Ineg.Acc.fini

$$0\leq f(x)-f(0)\leq 1,234.(x-0)$$
$$\Rightarrow 1\leq f(x)\leq 1+1,234.x$$
$$1\leq f(0,0000000011)\leq 1+1,234.11.10^{-10}$$

3. $1\leq f(0,0000000011)\leq 1+13,57.10^{-10}$
$\Rightarrow 1\leq f(0,0000000011)\leq 1,000000001$

EX 10 : f(x)= $\frac{1}{\sqrt{1+x}}$; $I=[0,1]$

1. la fonction : x → 1+x
est dérivable et strictement positive sur [0,1] d'où f est dérivable sur [0,1]

$$f'(x)=\frac{-1}{2(1+X)\sqrt{1+X}}=\frac{-1}{2(\sqrt{1+x})^3}$$

$$0\leq x\leq 1\Rightarrow 1\leq 1+x\leq 2$$
$$\Rightarrow 1\leq\sqrt{1+x}\leq\sqrt{2}$$
$$\Rightarrow 2\leq 2.(\sqrt{1+x})^3\leq 4\sqrt{2}$$

$$\Rightarrow\frac{1}{4\sqrt{2}}\leq\frac{1}{2(\sqrt{1+X})^3}\leq\frac{1}{2}$$
$$\Rightarrow|f'(x)|\leq\frac{1}{2}$$

Qarray.tn - Aqra Blech - Qarray.tn